参赛队员：徐　旺

所属学校：华南师范大学附属中学

所在地区：中华人民共和国，广东省

指导教师：郝保国

论文标题：组合数学的若干结论

组合数学的若干结论

摘要：

类比推理和归纳推理是重要的数学思想。通过类比推理和归纳推理，可以从已有的结论诱导出诸多合理猜想。本人应用这两种思想研究了组合数学这一数学分支。在研究过程中，通过对已有组合恒等式定理进行分析，再加以必要的推导和计算，做出假设猜想，进而寻找严格的数学证明，由此得到了不少结论。而在本文中所列举的是研究中所得到的原创的结论。此外，本文结论的证明也有一定的创新性，如利用构建抽象的概率统计模型来证明恒等式。

关键词：

多项式系数、幂级数

Some conclusions of the combinatorial mathematics

Abstract：

Analogical reasoning and inductive reasoning are important mathematics thoughts. Using these two kinds of methods we can make plausible conjectures form known conclusions, and then is easy to get new conclusions. In this paper, I do a research on combinatorial mathematics. During the research, I analyze the known combinatorial identities and conclusions, do some necessary reasoning and calculation, make plausible conjectures and then prove them. Using this way, I get a lot of conclusions. And what I listed in this paper are part of my conclusions and they are totally original. Besides, the proofs of the conclusions are innovative. For example, I prove an identity with the help of a probabilistic model.

Key words：

Multinomial coefficient、Power series

一、 本文中的有关定义

1.多项式系数

多项式系数的定义为：

$$\binom{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1,a_2,\cdots,a_n}=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)!}{a_1!a_2!\cdots a_n!}$$（$n\geq 2$， $a_1,a_2,\cdots,a_n$为非负整数）

不难知道上式是多项式$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$的展开式中$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$项的系数。多项式系数有如下性质：

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\binom{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_1,a_2,\cdots,a_k}=k^n$$

2.第二类 Stirling 数

第二类 Stirling 数$S(n,k)$是把 n 个元素的集合划分为 k 个不相交非空真子集的划法数。其代数定义为：

$$x^n=\sum_{k=1}^{n}S(n,k)(x)_k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}S(n,k)\langle x\rangle_k$$

其中$(x)_k=x(x-1)\cdots(x-k+1)$ $\langle x\rangle_k=x(x+1)\cdots(x+k-1)$

其显式表示为：

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{j}(k-j)^n=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n$$

3.Eulerian 数

对于 Eulerian 数$A(n,k)$有：

$$x^n=\sum_{k=1}^{n}A(n,k)\binom{x+k-1}{n}\qquad A(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k-i)^n$$

及 Frobenius 定理：

$$\sum_{k=1}^{n}A(n,k)x^k=x\sum_{k=1}^{n}k!S(n,k)(x-1)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k!S(n+1,k+1)(x-1)^{n-k}$$

N\K	1	2	3	4	5	6
1	1	-	-	-	-	-
2	1	1	-	-	-	-
3	1	3	1	-	-	-
4	1	7	6	1	-	-
5	1	15	25	10	1	-
6	1	31	90	65	15	1

第二类 Stirling 数数值表

N\K	1	2	3	4	5	6
1	1	-	-	-	-	-
2	1	1	-	-	-	-
3	1	4	1	-	-	-
4	1	11	11	1	-	-
5	1	26	66	26	1	-
6	1	57	302	302	57	1

Eulerian 数数值表

4.特殊符号

$\bigcup_p q$ 表示对所有满足条件 p 的条件 q 取并，相当于“或”。

$\bigcap_p q$ 表示对所有满足条件 p 的条件 q 求交，相当于“且”。

二、 多项式系数的两条结论

帕斯卡三角形是二项式系数的一种排列形式。在提及帕斯卡三角形的有关性质时，总会有：

$F_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k}$，其中 $\{F_n\}$ 为 Fibonacci 数列。

即按照一定的规则将二项式系数相加可以得到 Fibonacci 数列各项。那么，换成是多项式系数呢？通过尝试证实了，按照一定的规则将多项式系数相加，仍可以得到二阶递推数列：

结论一

设 $A_n = \sum_{a_1+2a_2+\cdots+2a_k=n} \binom{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_1, a_2, \cdots, a_k}$，则有 $A_{n+2} = A_{n+1} + (k-1)A_n, n \geq 0$ 。

证明：

（1）当 n 为奇数时，不妨设 n=2m+1，

$$A_{n+2}=\sum_{a_1+2a_2+\cdots+2a_k=n+2}\binom{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_1,a_2,\cdots,a_k}=\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{a_2+\cdots+a_k=m-i+1}\binom{m+i+2}{2i+1,a_2,\cdots,a_k}$$

$$=\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+i+2}{m-i+1,2i+1}\sum_{a_2+\cdots+a_k=m-i+1}\binom{m-i+1}{a_2,\cdots,a_k}=\sum_{i=0}^{m+1}(k-1)^{m-i+1}\binom{m+i+2}{m-i+1,2i+1}$$

$$A_{n+1}+(k-1)A_n$$

$$=\sum_{a_1+2a_2+\cdots+2a_k=n+1}\binom{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_1,a_2,\cdots,a_k}+(k-1)\sum_{a_1+2a_2+\cdots+2a_k=n}\binom{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_1,a_2,\cdots,a_k}$$

$$=\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{a_2+\cdots+a_k=m-i+1}\binom{m+i+1}{2i,a_2,\cdots,a_k}+(k-1)\sum_{i=0}^{m}\sum_{a_2+\cdots+a_k=m-i}\binom{m+i+1}{2i+1,a_2,\cdots,a_k}$$

$$=\sum_{i=0}^{m+1}\binom{m+i+1}{m-i+1,2i}\sum_{a_2+\cdots+a_k=m-i+1}\binom{m+i+1}{a_2,\cdots,a_k}+(k-1)\sum_{i=0}^{m}\binom{m+i+1}{m-i,2i+1}\sum_{a_2+\cdots+a_k=m-i}\binom{m-i}{a_2,\cdots,a_k}$$

$$=\sum_{i=0}^{m+1}(k-1)^{m-i+1}\binom{m+i+1}{m-i+1,2i}+\sum_{i=0}^{m}(k-1)^{m-i+1}\binom{m+i+1}{m-i,2i+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(k-1)^{m-i+1}\left[\binom{m+i+1}{m-i+1,2i}+\binom{m+i+1}{m-i,2i+1}\right]+1$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(k-1)^{m-i+1}\binom{m+i+2}{m-i+1,2i+1}+1=\sum_{i=0}^{m+1}(k-1)^{m-i+1}\binom{m+i+2}{m-i+1,2i+1}$$

比较两式即有$A_{n+2}=A_{n+1}+(k-1)A_n$。

（2）当 n 为偶数时，应用类似的方法可证明$A_{n+2}=A_{n+1}+(k-1)A_n$。

证毕□

可以构造一个数列$\{A_n\}$： $A_n=\sum_{a_1+2a_2+\cdots+2a_k=n}\binom{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_1,a_2,\cdots,a_k}$。已知递推关系$A_{n+2}=A_{n+1}+(k-1)A_n,n\geq 0$，及初始项$A_0=A_1=1$，利用特征方程法解出该数列的通项公式得：

$$A_n=\frac{1}{\sqrt{4k-3}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{4k-3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{4k-3}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

即得到如下恒等式：

$$\sum_{a_1+2a_2+\cdots+2a_k=n}\binom{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_1,a_2,\cdots,a_k}=\frac{1}{\sqrt{4k-3}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{4k-3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{4k-3}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

显然，当 k=2 时，该数列即为 Fibonacci 数列。

在数学竞赛的相关辅导书籍中，可以看到如下恒等式：

$$\sum_{n=0}^{m}\binom{n+m}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=2^{m},m\in N$$

直接证明这一恒等式是不难的。通过归纳猜想也不难得到其在多项式系数中的推广。若想直接证明推广后的恒等式，难度较大。不妨构造一个抽象得概率模型来解决这一问题：

结论二

$$\sum_{a_2,\cdots,a_k\le m}\binom{m+a_2+\cdots+a_k}{m,a_2,\cdots,a_k}\left(\frac{1}{k}\right)^{a_2+\cdots+a_k}=k^{m}$$

证明：

（1）设数集 $K=\{n|0\le n\le k,n\in N\}$。

（2）定义一个标签有向图 D，该标签有向图由序对 (V,A) 给定。

其中 V 是顶点的集合。序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 与 V 中的顶点一一对应（其中 $a_1,a_2,\cdots,a_k\in N$），记这个一一对应关系为 $f(u)=\left(a_{u_1},a_{u_2},\cdots,a_{u_k}\right)$。对于任意的 $u\in V$，记 $\varphi(u)=a_{u_1}+a_{u_2}+\cdots+a_{u_k}$。

而 A 是弧的集合，$A=\left\{(u,v)\middle|u,v\in V,\bigcup_{i\in K}\left[\bigcap_{j\in K,j\ne i}\left(a_{u_j}=a_{v_j}\right),a_{v_i}-a_{u_i}=1\right]\right\}$。

这样每一个顶点均与 k 个不同的顶点相邻。

（3）定义从顶点 $o\left(f(o)=(0,0,\cdots,0)\right)$ 出发，长度为 g 的路径为 g-路径（g 为一足够大的常数）。

可以证明，等概率地选择一条 g-路径，恰好经过顶点 $u\left(f(u)=(a_1,a_2,\cdots,a_k)\right)$的概率：$P=\binom{a_1+a_2+\cdots+a_k}{a_1,a_2,\cdots,a_k}\left(\frac{1}{k}\right)^{a_1+u_2+\cdots+a_k}\quad\left(g\gg\varphi(u)\right)$

（4）设点集$M=\left\{u\middle|u\in V,\bigcup_{i\in K}\left[\bigcap_{j\in K,j\neq i}0\le a_j\le m,a_i=m+1\right]\right\}\left(g\gg km+1\right)$，不难知道所有的 g-路径至少经过点集 M 中的一个顶点。

可知经过顶点 $v\left(v\in M,f(v)=(m+1,a_2,\cdots,a_k)\right)$，而不经过点集 $N=\left\{\omega\middle|\omega\in M,\varphi(\omega)\prec\varphi(u)\right\}$ 中的任一顶点的 g-路径必定经过顶点 $u\left(f(u)=(m,a_2,\cdots,a_k)\right)$。因顶点 u 与顶点 v 相邻，所以经过顶点 u 的 g-路径，又经过顶点 v 的概率为$\frac{1}{k}$。等概率地选择一条 g-路径恰好经过 $v\left(v\in M,f(v)=(m+1,a_2,\cdots,a_k)\right)$，而不经过点集$N=\left\{\omega\middle|\omega\in M,\varphi(\omega)\prec\varphi(u)\right\}$中任一顶点的概率为：$P=\binom{m+a_2+\cdots+a_k}{m,a_2,\cdots,a_k}\left(\frac{1}{k}\right)^{m+a_2+\cdots+a_k+1}$

因为所有的 g-路径至少经过 M 中的一个顶点，故有：

$$\sum_{a_2,\cdots,a_k\le m}\binom{m+a_2+\cdots+a_k}{m,a_2,\cdots,a_k}\left(\frac{1}{k}\right)^{m+a_2+\cdots+a_k+1}+\sum_{a_1,\cdots,a_k\le m}\binom{a_1+m+\cdots+a_k}{a_1,m,\cdots,a_k}\left(\frac{1}{k}\right)^{a_1+m+\cdots+a_k+1}$$

$$+\cdots+\sum_{a_1,a_2,\cdots\le m}\binom{a_1+a_2+\cdots+m}{a_1,a_2,\cdots,m}\left(\frac{1}{k}\right)^{a_1+a_2+\cdots+m+1}=1$$

由对称性可知：$k\sum_{a_2,\cdots,a_k\le m}\binom{m+a_2+\cdots+a_k}{m,a_2,\cdots,a_k}\left(\frac{1}{k}\right)^{m+a_2+\cdots+a_k+1}=1$

故有：$\sum_{a_2,\cdots,a_k\le m}\binom{m+a_2+\cdots+a_k}{m,a_2,\cdots,a_k}\left(\frac{1}{k}\right)^{a_2+\cdots+a_k}=k^m$

证毕□

三、 两个无穷幂级数的显式表达

在解决某些组合数学问题时，需要计算一些无穷幂级数的显式表

达。如在计算线性递推数列的生成函数时，往往需要计算幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} n^k \frac{x^n}{n!}\left(k \in N\right)$ 的显式表达。而直接通过运算求解是困难的，下文将通过归纳猜想再证明的方法得到这两个无穷幂级数的显式表达。

记 $N_k\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n \ \left(k \in N\right)$，易知 $N_0\left(x\right)=\frac{1}{1-x}$。

$$N_k\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)^k x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} n^i x^{n+1}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} x N_i\left(x\right) \Rightarrow$$

$$\left(1-x\right)N_k\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i} x N_i\left(x\right) \Rightarrow N_k\left(x\right)=\frac{1}{1-x}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i} x N_i\left(x\right) \qquad \left(k \geq 1\right)$$

借助这一递推关系可以算得：

$N_1\left(x\right)=\frac{x}{\left(1-x\right)^2}$，$N_2\left(x\right)=\frac{x^2+x}{\left(1-x\right)^3}$，$N_3\left(x\right)=\frac{x^3+4x^2+x}{\left(1-x\right)^4}$，

$N_4\left(x\right)=\frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{\left(1-x\right)^5}$，$N_5\left(x\right)=\frac{x^5+26x^4+66x^3+26x^2+x}{\left(1-x\right)^6}$，

……

观察各式的形式，做出猜想：$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n=\sum_{i=1}^{k}\frac{A\left(k,i\right)x^i}{\left(1-x\right)^{k+1}} \qquad \left(k \geq 1\right)$

又有 Frobenius 定理，那么原猜想与下式等价：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n=\sum_{i=0}^{k}\frac{\left(-1\right)^{k-i} i!S\left(k+1,i+1\right)}{\left(1-x\right)^{i+1}} \left(k \geq 1\right)$$

又有 $N_0\left(x\right)=\frac{1}{1-x}$，亦符合该上式的形式，故该猜想还可进一步强化为：$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n=\sum_{i=0}^{k}\frac{\left(-1\right)^{k-i} i!S\left(k+1,i+1\right)}{\left(1-x\right)^{i+1}}$

现检验猜想的正确性：

令 $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\left(-1\right)^{k-i}i!S\left(k+1,i+1\right)}{\left(1-x\right)^{i+1}}$。

则有： $f^{(n)}\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\left(-1\right)^{k-i}\left(n+i\right)!S\left(k+1,i+1\right)}{\left(1-x\right)^{n+i+1}}$

$$\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}=\sum_{i=0}^{k}\left(-1\right)^{k-i}S\left(k+1,i+1\right)\left\langle n+1\right\rangle_{i}=\sum_{i=1}^{k+1}\left(-1\right)^{k+1-i}S\left(k+1,i\right)\left\langle n+1\right\rangle_{i}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k+1}\left(-1\right)^{k+1-i}S\left(k+1,i\right)\left\langle n\right\rangle_{i}$$

由第二类 Stirling 数的代数定义知： $\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}=\frac{1}{n}n^{k+1}=n^{k}$

由麦克劳林展开公式知： $f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}n^{k}x^{n}$ 。

即： $\sum_{n=0}^{\infty}n^{k}x^{n}=\sum_{i=0}^{k}\frac{\left(-1\right)^{k-i}i!S\left(k+1,i+1\right)}{\left(1-x\right)^{i+1}}\quad\left(k\in N\right)$

于是得到如下结论：

结论三 $\sum_{n=0}^{\infty}n^{k}x^{n}=\sum_{i=0}^{k}\frac{\left(-1\right)^{k-i}i!S\left(k+1,i+1\right)}{\left(1-x\right)^{i+1}}\qquad\left(k\in N\right)$

同样地记 $M_{k}\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}n^{k}\frac{x^{n}}{n!}$， 且有 $M_{0}\left(x\right)=e^{x}$ 。

$$M_{k}\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}\frac{x^{n}}{\left(n-1\right)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)^{k-1}\frac{x^{n+1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}n^{i}\frac{x^{n+1}}{n!}\ \left(k\geq1\right)$$

$$\Rightarrow M_{k}\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}xM_{i}\left(x\right)\qquad\left(k\geq1\right)$$

根据上面的递推关系可以计算得：

$M_{1}\left(x\right)=xe^{x}$， $M_{2}\left(x\right)=xe^{x}+x^{2}e^{x}$， $M_{3}\left(x\right)=xe^{x}+3x^{2}e^{x}+x^{3}e^{x}$，

$M_{4}\left(x\right)=xe^{x}+7x^{2}e^{x}+6x^{3}e^{x}+x^{4}e^{x}$，

$M_{5}\left(x\right)=xe^{x}+15x^{2}e^{x}+25x^{3}e^{x}+10x^{4}e^{x}+x^{5}e^{x}$，

……

观察上面各式的形式，并做出猜想：$\sum_{n=0}^{\infty} n^k \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=1}^{k} S(k,i) x^i e^x \quad (k \ge 1)$

现检验猜想的正确性：

设 $g(x) = \sum_{i=1}^{k} S(k,i) x^i e^x$ 。

则有： $g^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{k} S(k,i) \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \frac{i!}{(i-j)!} x^{i-j} e^x$

$g^{(n)}(0) = \sum_{i=1}^{k} S(k,i) i! \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{k} S(k,i) (n)_i$

由第二类 Stirling 数得代数定义知： $g^{(n)}(0) = n^k$

由麦克劳林展开公式知 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^k \frac{x^n}{n!}$ 。

即： $\sum_{n=0}^{\infty} n^k \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=1}^{k} S(k,i) x^i e^x \qquad (k \ge 1)$

于是得到如下结论：

结论四 $\sum_{n=0}^{\infty} n^k \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=1}^{k} S(k,i) x^i e^x \quad (k \ge 1)$

参考文献：

[1]谭明术。组合序列与矩阵[M]。科学出版社，2008。

[2]Fred S. Roberts，Barry Tesman。应用组合数学[M]。机械工程出版社，2007。